מדבקה

מספר זהות: _____

מספר מחברת: _____

מבחן בקורס מודלים חישוביים, חישוביות וסיבוכיות (67521)

מועד א', תאריך 6.2.2026, שעה 9:00

מרצת הקורס: פרופ' אורנה קופרמן
מתרגלים: ניר לביא ועופר לשקוביץ
מרכזים: דוד אנגל קלך ונעמה שמש הלוי

הוראות כלליות:

1. יש למלא מספר זהות בראש עמוד זה.

2. משך המבחן 3 שעות.
3. יש לענות על כל השאלות.
4. **השיבו על השאלות על גבי טופס זה בלבד**. המחברות הן טיוטה ולא ייבדקו.
5. במידה ואתם זקוקים למקום נוסף לצורך מענה על סעיף כלשהו, השתמשו בדפי התשובות הריקים המופיעים בסוף טופס זה. אנא ציינו את העמוד בו אתם ממשיכים את התשובה. אם אתם זקוקים לדפי תשובות נוספים, עליכם לבקש מהמשגיח/ה טופס שלם נוסף. אין להוסיף דפים בודדים.
6. נסחו והוכיחו במדויק כל טענה בה אתם עושים שימוש. אם הטענה הוכחה בכיתה, בתרגול או בתרגיל, אין צורך להוכיח ודי לנסח במדויק (ולציין שראינו את ההוכחה בקורס), אלא אם נתבקשתם להוכיח אותן בשאלה.
7. השימוש בכל חומר עזר אסור.

8. צוות הקורס יעבור בכיתה במהלך הבחינה. ניתן לשאול שאלות הבהרה לגבי ניסוח השאלות. אנא המנעו מלשאול שאלות על החומר ועל התשובות שלכם.

בהצלחה!

<u>שאלה 1 (9 נקודות)</u>

נביט בשפה

$$L = \{\sigma \cdot w : \quad \sigma \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^*, \text{and } \sigma = |w| \bmod 2\}$$

למשל, המילים $\epsilon, 00, 101$ אינן ב-L, והמילים $0,11,001$ ב-L.

אם L רגולרית, ציירו DFA מינימלי עבור L, והוכיחו שהוא אכן מינימלי. (אין צורך להוכיח את נכונות ה-DFA). אחרת, הוכיחו כי L לא רגולרית.

הקיפו את בחירתכם: $L \in REG$ $L \notin REG$

שאלה 2 (14 נקודות)

עבור שפה $L \subseteq \{0,1\}^*$, נגדיר $\mathrm{comp}(L) = \{0,1\}^* \setminus L$ ו- $\mathrm{info}(L) = (1 \cdot L) \cup (0 \cdot \mathrm{comp}(L))$.

תהי $L \subseteq \{0,1\}^*$ שפה רגולרית ולא טריוויאלית (כלומר, $L \neq \emptyset$ ו- $L \neq \{0,1\}^*$).

נסמן ב-$index(L)$ וב-$index(\mathrm{info}(L))$ את הגודל של ה-DFA המינימלי עבור L ו-$\mathrm{info}(L)$, בהתאמה.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו שהיא מתקיימת, או תארו דוגמא נגדית עבורה.

אם התשובה שלכם כוללת תיאור של אוטומט וטענה על השפה שלו, אין צורך להוכיח שזו אכן השפה.

אם התשובה שלכם כוללת הצבעה על שפה וציון של האינדקס שלה, אין צורך להוכיח שזה אכן האינדקס.

אם התשובה שלכם כוללת בניה, יש לתאר אותה באופן פורמלי, אבל אין צורך להוכיח את נכונותה.

טענה 1: $index(\mathrm{info}(L)) \leq 2 \cdot index(L) + 1$

טענה 1 (הקיפו): נכונה / לא נכונה

טענה 2 : $index(\text{info}(L)) \geq 2 \cdot index(L) + 1$.

טענה 2 (הקיפו): נכונה / לא נכונה

שאלה 3 (10 נקודות)

עבור שפה $L \subseteq \{a,b\}^*$, נגדיר $\text{count}(L) = \{1^{|w|} : w \in L\}$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו שהיא מתקיימת לכל דקדוק חסר הקשר G, או תארו דוגמא נגדית עבורה. אם התשובה שלכם כוללת בניה, יש לתאר אותה באופן פורמלי, אבל אין צורך להוכיח את נכונותה .

1. אם $L(G)$ רגולרית, אז $\text{count}(L(G))$ רגולרית.

טענה 1 (הקיפו): נכונה / לא נכונה

2. אם $\text{count}(L(G))$ רגולרית, אז $L(G)$ רגולרית.

טענה 2 (הקיפו): נכונה / לא נכונה

שאלה 4 (14 נקודות)

עבור מילה $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, נגדיר את $rev(w)$ להיות המילה המתקבלת מהיפוך סדר האותיות ב-w.

כלומר, $rev(w) = \sigma_n \cdots \sigma_1$. עבור שפה L, נגדיר $rev(L) = \{rev(w) : w \in L\}$.

יהי Σ א״ב סופי ויהיו $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ שתי שפות לא טריוויאליות (כלומר, אינן $\emptyset$ או Σ^*) עבורן $L_1 \leq_m rev(L_2)$. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו את נכונותה והוכיחו את תשובתכם.

טענה 1 : $rev(L_1) \leq_m L_2$.

טענה 1 (הקיפו): נכונה / לא נכונה

טענה 2 : $L_2 \leq_m rev(L_1)$.

טענה 2 (הקיפו): נכונה / לא נכונה

$L = \{w \neq \langle M \rangle\} \cup \{\langle M \rangle \mid L(M) \notin coRE\}$

שאלה 5 (7 נקודות)

נתבונן בשפה $L = \{\langle M \rangle : M \text{ is a TM and } L(M) \in coRE \setminus R\}$.

לאיזו מחלקת חישוביות שייכת L? סמנו והוכיחו את תשובתכם.

תשובה (הקיפו): R $\quad$ $coRE \setminus R$ $\quad$ $RE \setminus R$ $\quad$ $\overline{RE \cup coRE}$

הוכחה:

נ"כ כאן כל הרמ"מים עקי + ושמלא אות מ על w לא נעקיב. אים קיבלו נדחה.

$L \leq_m \overline{HALT}$

$\langle M' \rangle \Leftrightarrow \langle M, w \rangle$

- M' מחזיר את מ על w
- M' מצהיר אות HALT נפרוו את M' על w ונראה רמ"ה.

שאלה 6 (14 נקודות)

נתבונן בשפה הבאה

$$L = \{\langle M, w\rangle : \ M \text{ is a TM}, w \in \Sigma^*, M \text{ accepts } w, \text{and } |L(M)| \geq 2026\}$$

לאיזו מחלקת חישוביות שייכת L? סמנו והוכיחו את תשובתכם.

תשובה (הקיפו): R $\quad coRE \setminus R$ $\quad RE \setminus R$ $\quad \overline{RE \cup coRE}$

הוכחה:

עבור ...ב.1=t

נסמלץ את כל המילים באורך t+1 עד

t+1 דרגים.

נסבור כמה קיבלנו

אם זה מדל אפס, נסמלץ את מ דלא

ונענה כמנה.

המשך תשובה לשאלה 6

$\langle G, s, t \rangle$

<u>שאלה 7 (14 נקודות)</u>

מהי מחלקת הסיבוכיות של השפה הבאה? בחרו והוכיחו אחת מהאפשרויות הבאות.

$$L = \left\{ \langle G, s, t \rangle : \begin{array}{c} G = \langle V, E \rangle \text{ is a directed graph}, s, t \in V, \\ \text{and there are at least two Hamiltonian paths from } s \text{ to } t \end{array} \right\}$$

מחלקה (הקיפו): NL-complete PTIME NP-complete coNP-complete PSPACE-complete

הוכחה:

נוכיח כי קלט נמצא ב

$L \leq_p$ D-S-T-HAMPATH

$\langle G, s, t \rangle$ $\langle G', s', t \rangle$

נוסיף שלשה קודקודים כך:

$V' = V \cup \{s', s_1', s_2'\}$

$E = E \cup \{(s', s_1'), (s', s_2'), (s_1', s_2'), (s_2', s_1'), (s_1', s), (s_2', s)\}$

$s' \to s_1' \to s_2' \to s \to \dots t$ יש מסלול ב

$\langle G, s, t \rangle \in$ DSTHP

$s' \to s_2' \to s_1' \to s \dots t$

$\langle G, s, t \rangle \in$

המשך תשובה לשאלה 7

שאלה 8 :

בכל אחד משני הסעיפים א-ב כתובה טענה. לכל טענה, קבעו האם היא נכונה, אינה נכונה, או שנכונותה אינה ידועה. הוכיחו את תשובתכם. במידה ובחרתם באפשרות השלישית, סמנו אילו מהעובדות שברשימה ינבעו לו יוכח שהטענה נכונה, ונמקו מדוע ינבעו. יש לסמן ולהוכיח את כל העובדות שינבעו. אין צורך להוכיח מדוע עובדות שלא סימנתם לא ינבעו.

א. (9 נקודות) טענה : $A_{NFA} \leq_{logspace} PATH$. תזכורת :

$$A_{NFA} = \{\langle N, w\rangle: \quad N \text{ is an NFA over } \Sigma, w \in \Sigma^*, \text{and } w \in L(N)\ \}$$

$$PATH = \left\{\langle G, s, t\rangle: \quad \begin{array}{c} G = \langle V, E\rangle \text{ is a directed graph}, s, t \in V, \\ \text{and there is a path from } s \text{ to } t \text{ in } G \end{array} \right\}$$

הטענה :

א. נכונה ב. לא נכונה

ג. נכונותה לא ידועה ותגרור את : (הקיפו והוכיחו את כל התשובות הנכונות)

$P = NP$ $P \neq NP$ $NP = coNP$ $NP = PSPACE$ $P = PSPACE$ $P = NL$ $L = NL$

ב. (9 נקודות)

נביט בשפה L הבאה:

$$L = \{\langle \theta, A \rangle : \quad \theta \text{ is a 3CNF formula}, A \text{ is an NFA}, \text{and } \theta \text{ is satisfiable iff } L(A) = \Sigma^*\}$$

טענה: $L \in NP$.

הטענה:

א. נכונה ב. לא נכונה

ג. נכונותה לא ידועה ותגרור את: (סמנו והוכיחו את כל התשובות הנכונות)

$P = NP$ $P \neq NP$ $NP = coNP$ $NP = PSPACE$ $P = PSPACE$ $P = NL$ $L = NL$

עמוד תשובות נוסף, מספר 1

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 2

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 3

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 4

המשך שאלה _____ סעיף _____